Министерство образования и науки Российской Федерации
Северо-Восточный федеральный университет имени М.К.Аммосова

На правах рукописи

Колесов Александр Егорович

Численное моделирование проблем пороупругости

Специальность: 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Якутск – 2014

Работа выполнена на научно-исследовательской кафедре вычислительных технологий Института математики и информатики Северо-Восточного федерального университета имени М.К. Аммосова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор, **Вабищевич Петр Николаевич**
Официальные оппоненты:	**Матус Петр Павлович**, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики НАН Беларусии, зам. директора **Лазарев Нюргун Петрович**, кандидат физико-математических наук, НИИ математики СВФУ, ст. научный сотрудник
Ведущая организация:	Институт прикладной математики РАН им. М.В.Келдыша

Защита состоится 22 декабря 2014 года в 12 часов на заседании диссертационного совета Д 212.306.04 при Северо-Восточном федеральном университете имени М.К. Аммосова, расположенном по адресу: 677000, г. Якутск, ул. Белинского 58, зал заседаний Ученого совета.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Северо-Восточного федерального университета имени М.К. Аммосова, 677000, г. Якутск, ул. Белинского, 58 и на сайте http://s-vfu.ru/universitet/rukovodstvo-i-struktura/strukturnye-podrazdeleniya/unir/otdel-dissertatsionnykh-sovetov/disser_soiskateli.

Автореферат разослан “ ” октября 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н. Саввинова Н.А.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Исследование современных научно-технических проблем базируется на проведении масштабных экспериментальных и теоретических исследований. Теоретическое исследование явлений и процессов проводится с широким использованием информационных технологий. Вычислительные методы позволяют проводить исследование сложных взаимосвязанных процессов в рамках вычислительного эксперимента.

Прикладное математическое моделирование течения жидкости в пористых средах играет важную роль в понимании процессов, происходящих во время добычи углеводородного сырья, и используется для исследования оптимальных способов разработки месторождений. С помощью моделирования выбирается оптимальное расположение скважин, тестируются различные технологии добычи и т.д.

Математические модели фильтрации базируются на фундаментальных законах механики многофазных сред и включают системы уравнений с частными производными, описывающих законы сохранения массы фаз и количества движения. Кроме того, в зависимости от особенностей пористой среды и жидкости или исследуемого процесса математическая модель дополняется различными вспомогательными уравнениями. Например, при использовании термических методов интенсификации притока к стандартной системе уравнений добавляется уравнение теплопроводности.

Наличие движущейся жидкости в пористой горной породе оказывает существенное влияние на его механическое состояние. Таким образом, недооценка данного процесса может привести к разрушающим явлениям со значительным экономическим и экологическим ущербом. Деформации играют важную роль в процессах сжатия продуктивных пластов, оседания земной поверхности и морского дна, смятия обсадных колонн скважин и т.д. Также деформация горных пород может вызвать существенное изменение их фильтрационно-емкостных свойств.

Совместный механизм течения жидкости и деформирования пористых сред изучает теория пороупругости (фильтрационной консолидации). При этом базовые математические модели фильтрации дополняются уравнением упругости Ламе для перемещений среды. Важнейшей особенностью математических моделей пороупругости является сильная связь между уравнениями модели. Так, урав-

нение упругости включает объемную силу, которая пропорциональна градиенту давления, а уравнение фильтрации, в свою очередь, содержит сжимаемость среды пропорциональную дивергенции скорости перемещений.

В некоторых прикладных задачах мы имеем дело с различного рода пластинами и оболочками, когда поперечные размеры существенно меньше продольных. В этом случае мы имеем дело с упрощенными моделями упругости, когда вместо векторного уравнения Ламе используется скалярное эллиптическое уравнение четвертого порядка, описывающее прогиб пластины в поперечном направлении. Наличие движущейся жидкости в порах пластин также приводит к задаче пороупругости. Причем могут рассматривать как двумерные, так трехмерные уравнения фильтрации.

Для численного решения краевых задач математической физики уравнения сначала аппроксимируются по пространству. Для задач пороупругости широкое применение получили методы конечных разностей и конечных элементов. Особенностью рассматриваемых задач является необходимость аппроксимации как скалярных, так и векторных полей. При приближенном решении задач пороупругости приходиться применять различные аппроксимации для перемещений и давления.

Для приближенного решения краевых задач для нестационарных уравнений используются разностные аппроксимации по времени. Традиционно ориентируются на двухслойные разностные схемы первого и второго порядка аппроксимации. Исследование устойчивости проводится на основе общей теории устойчивости (корректности) операторно-разностных схем А.А. Самарского.

Вычислительная реализация традиционных неявных схем для нестационарных систем уравнений с частными производными связана с решением завязанных систем сеточных эллиптических уравнений на новом временном слое. Такие задачи требуют использования специальных итерационных методов, которые максимально учитывают специфику рассматриваемых задач. Вторая возможность приближенного решения нестационарных задач для систем уравнений связана с использованием схем расщепления, когда переход на новый временной слой обеспечивается решением стандартных сеточных эллиптических задач.

При построении схем расщепления для нестационарных задач пороупругости мы ориентируемся на расщепление по физическим процессам. Переход на новый временной слой в этом случае базируется на решении отдельных задач для

смещений пористой среды и для давления в порах. В настоящее время известны несколько схем расщепления. Однако их построение базируется на эвристических соображениях инженерного плана, устойчивость таких схем исследуется экспериментально, строгих математических результатов об их устойчивости практически нет. Поэтому актуальной проблемой вычислительной математики является построение абсолютно устойчивых схем расщепления по физическим процессам для задач пороупругости (фильтрационной консолидации), разработка на их основе вычислительных алгоритмов приближенного решения нестационарных задач пороупругости и их применение для решения прикладных проблем фильтрации.

Целью диссертационной работы является разработка вычислительных алгоритмов на основе схем расщепления по физическим процессам для численного моделирования проблем пороупругости. Для достижения поставленной цели сформулированы следующие задачи исследования:

- Построение безусловно устойчивых схем расщепление по физическим процессам для задач пороупругости;
- Построение безусловно устойчивых схем расщепление по физическим процессам для задач пороупругости для пластин;
- Численное моделирование прикладных задач пороупругости при разработке месторождений нефти и газа.

Научная новизна и практическая значимость. В диссертационной работе получены следующие научные результаты:

- Построены безусловно устойчивые схемы расщепления по физическим процессам для приближенного решения задач пороупругости;
- Проведено численное моделирование проблем пороупругости для пластин.

Результаты, изложенные в диссертации, имеют большое практическое значение для построения и использования эффективных вычислительных алгоритмов для приближенного решения прикладных проблем пороупругости при добыче нефти и газа.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- Международная конференция "Суперкомпьютерные технологии математического моделирования". Якутск, 2011;
- III Всероссийская научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых и специалистов "Математическое моделирование развития северных территорий Российской Федерации". Якутск, 2012;
- Russian and Caspian Regional SPE Student Paper Contest, PhD Division. Moscow. 2013;
- Sixth International Conference on Porous Media. Milwaukee, Wisconsin USA, 2014;
- Sixth International Conference Finite Difference Methods: Theory and Applications. Lozenetz, Bulgaria. 2014.

Диссертационная работа была выполнена при поддержке грантов:

- Грант ФЦП №2009-1.1-224-010-015 *Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 гг., в рамках реализации мероприятия 1.1 Проведение научных исследований коллективами НОЦ, работа Разработка симуляторов экологически безопасных технологий разработки и мониторинга месторождений полезных ископаемых Арктики и регионов Севера*;
- Государственный заказ Министерства образования РФ №5542 *Разработка прикладного ПО для численного моделирования добычи углеводородного сырья на высокопроизводительных вычислительных системах*;
- Грант РФФИ № 13-01-00719А *Численное моделирование задач тепломассопереноса в фильтрующих грунтах в условиях криолитозоны на высокопроизводительных вычислительных системах*
- Грант РФФИ № 14-01-00785 *Вычислительные алгоритмы расщепления и прикладное программное обеспечение для решения задач термомеханики и фильтрационной консолидации на высокопроизводительных компьютерах параллельной архитектуры*

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 6 печатных работах, из них 2 статьи в рецензируемых журналах, входящих в перечень ВАК.

Личный вклад автора Определение цели, вопросы теоретического обоснования и практического использования численных методов, связанных с аппроксимацией дифференциальной задачи, а также формулировка результатов выносимых на защиту были выполнены автором совместно с научным руководителем, д.ф.-м.н., профессором П. Н. Вабищевичем. Постановка всех тестовых задач, вывод математических моделей для вычислительных экспериментов, разработка вычислительных алгоритмов и реализация их в виде программных моделей, а также интерпретация полученных результатов проведены автором лично. Основная часть публикаций по теме диссертации написана автором совместно с научным руководителем.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Диссертационная работа содержит 40 рисунков и 17 таблиц. Общий объем диссертационной работы составляет 124 страницы.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, кратко излагается содержание диссертации по главам.

В **первой главе** обсуждаются проблемы численного решения краевых задач пороупругости (фильтрационной консолидации). Базовая система уравнений включает стационарное уравнение Ламе для вектора перемещений $\boldsymbol{u}$ и нестационарное уравнение для давления p в пористой среде:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) - \alpha \operatorname{grad} p = 0, \tag{1}$$

$$\alpha \frac{\partial \operatorname{div} \boldsymbol{u}}{\partial t} + \beta \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div} \left(\frac{\boldsymbol{k}}{\eta} \operatorname{grad} p \right) = f. \tag{2}$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) + \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{u}\, \boldsymbol{I},$$

где μ, λ – коэффициенты Ламе, $\boldsymbol{I}$ – единичный тензор, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор деформации:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{grad}\boldsymbol{u} + \operatorname{grad}\boldsymbol{u}^T\right).$$

Другие обозначения: α – коэффициент Био, $\beta = 1/M$, M – модуль Био, $\boldsymbol{k}$ – тензор проницаемости, η – динамическая вязкость жидкости и f – интенсивность стока и источника. Уравнения (1), (2) дополняются стандартными однородными условиями первого и второго рода и начальными условиями.

Вычислительный алгоритм приближенного решения задачи пороупругости (краевая задача для уравнений (1), (2)) основан на конечно-элементной аппроксимации по пространству. Формулируется вариационная задача и дифференциально-операторная форма краевой задачи пороупругости, обсуждаются основные свойства билинейных форм и операторов, даются априорные оценки, обеспечивающие устойчивость задачи по начальным данным и правой части.

Для дискретизации по времени используется стандартная двухслойная схема с весами:

$$A\boldsymbol{u}^{n+1} + Gp^{n+1} = 0, \tag{3}$$

$$D\frac{\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}^n}{\tau} + C\frac{p^{n+1} - p^n}{\tau} + Bp_\theta^{n+1} = f_\theta^{n+1}, \tag{4}$$

где

$$p_\theta^{n+1} = \theta p^{n+1} + (1-\theta)p^n, \quad f_\theta^{n+1} = f(\boldsymbol{x}, t_\theta^{n+1})$$

и $0 \le \theta \le 1$. Условие устойчивости данной схемы формулируются в виде следующего утверждения.

Теорема 1. *При $\theta \ge 0.5$ для решения (3),(4) справедливы априорные оценки*

$$\|\boldsymbol{u}^{n+1}\|_A^2 + \|p^{n+1}\|_C^2 \le \|\boldsymbol{u}^n\|_A^2 + \|p^n\|_C^2 + \frac{\tau}{2}\|f_\theta^{n+1}\|_{B^{-1}}^2,$$

$$\|p^{n+1}\|_B^2 \le \|p^n\|_B^2 + \frac{\tau}{2}\|f_\theta^{n+1}\|_{C^{-1}}^2.$$

В рассматриваемой схеме вычислительная реализация требует решения системы связанных уравнений для перемещений и давления на новом временном слое. С этой целью используются те или иные итерационные методы. Более полно специфику задач пороупругости учитывают схемы расщепления по физическим процессам, когда переход на новый временной слой связан с решением отдельных задач для перемещения и давления.

Рассматриваются несколько известных схем расщепления, построенных на базе эвристических соображениях инженерного плана. Устойчивость таких схем исследуется экспериментально и строгих математических результатов об их устойчивости практически нет. В данной работе на основе принципа регуляризации операторно-разностных схем А.А. Самарского строится новая трехслойная явно-неявная схема расщепления схема с весами:

$$A\boldsymbol{u}^{n+1} + Gp^n = 0, \tag{5}$$

$$D\frac{\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}^n}{\tau} + C\left(\theta\frac{p^{n+1} - p^n}{\tau} + (1-\theta)\frac{p^n - p^{n-1}}{\tau}\right) + Bp^{n+1} = f^{n+1}. \tag{6}$$

Устойчивость схемы достигается за счет выбора веса θ, выступающего в качестве параметра регуляризации.

Теорема 2. *Схема расщепления (5), (6) безусловно устойчива при $2\theta \geq 1 + \gamma$, где величина параметра γ определяется как максимальное собственное значение ($\gamma = \lambda_{\max}$) спектральной задачи:*

$$GD\boldsymbol{u} = \lambda AC\boldsymbol{u}.$$

Работоспособность предложенных схем расщепления продемонстрирована на двух модельных задачах. Первой рассматривается задача деформирования пористой среды, представляющей собой единичную квадратную область, под воздействием внешнего давления $p = f(t) = 100\sin(t)$, приложенного к верхней границе. На рис. 1 показаны распределения давления и смещения в момент времени $t = 0.5\pi$ с, полученные с помощью неявной схемы (3),(4) на подробной сетке с локальный сгущением вблизи места приложения давления (8612 треугольных ячеек) и с шагом по времени $\tau = 0.005\pi$ с. Здесь вектор перемещения представлен на деформированной области и увеличен в 10^8 раз для наглядности. Для расчетов использовался следующий набор входных параметров: $\lambda = 10$ ГПа, $\mu = 15$ ГПа, $M = 150$ ГПа, $\alpha = 0.8$, $k = 50$ мД, $\eta = 0.001$ Па $\cdot$ с.

Проведено исследование зависимости точности связанной двухслойной схемы с весами (3),(4) от вычислительных параметров: сетки по пространству и шага по времени. Для новой схемы расщепления (5), (6) проведено исследование устойчивости при различных параметрах. На рис. 2 представлены графики динамики погрешности давления при различных значениях веса θ. Видно, что при $\theta = 1.3$ схема становится устойчивой, что согласуется с теоретическими результатами.

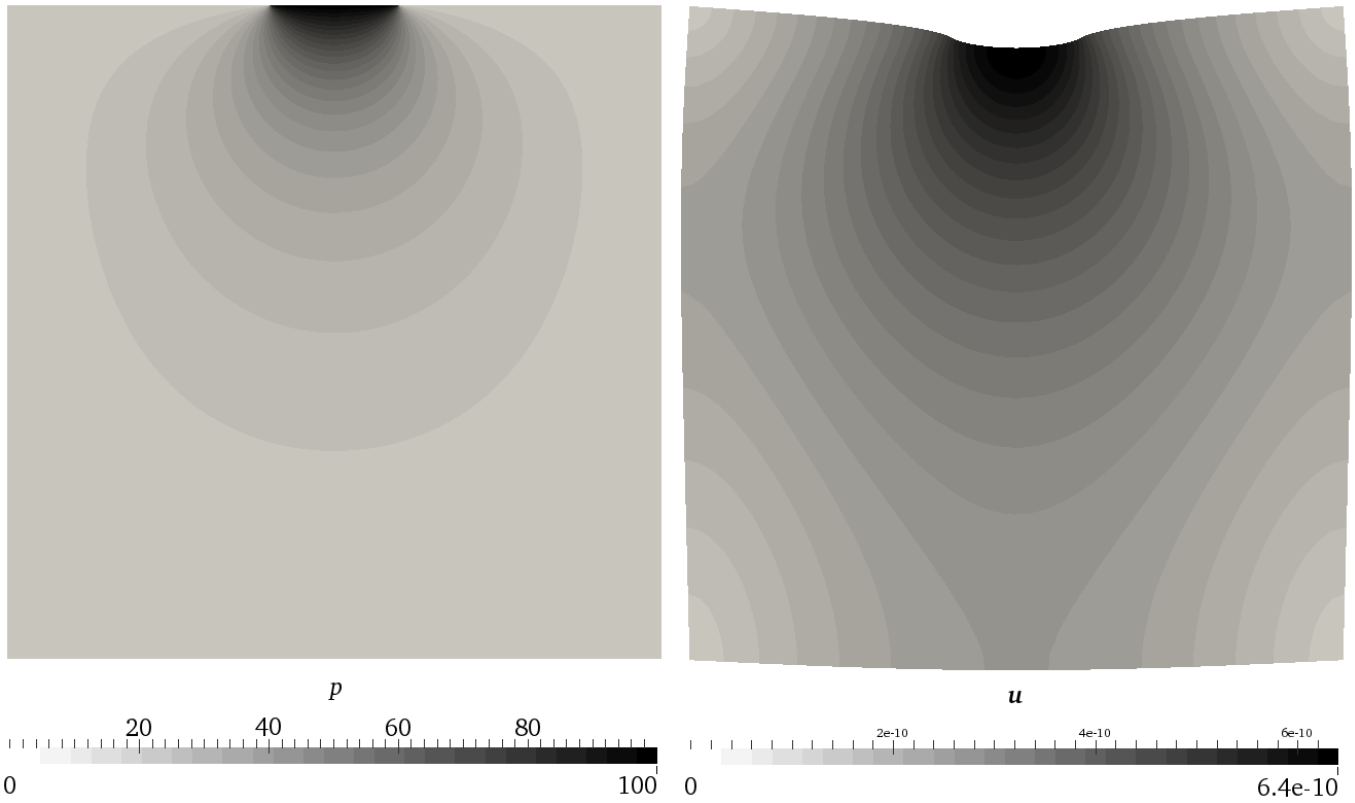

Рис. 1. Распределение давления (слева) и перемещения (справа)

Аналогичные результаты получены для второй модельной задачи, в которой рассматривается двумерная пористая среда с нагнетательной и добывающей скважинами.

Во **второй главе** рассмотрены задачи пороупругости для пластин. Пластина – тело с малой по сравнению с поперечными размерами толщиной h. В этом случае перемещения пористой среды $\boldsymbol{u}$ описываются прогибом пластины w – скалярной величиной, характеризующей среднее относительно толщины вертикальное перемещение пластины. Учет неоднородности давления p по пластине проводится с помощью статического момента давления P:

$$w = \frac{1}{h} \int\limits_{-h/2}^{h/2} u_3 dx_3, \quad P = \frac{12}{h^3} \int\limits_{-h/2}^{h/2} p x_3 dx_3.$$

Математическая модель пороупругости для пластин состоит из эллиптического уравнения четвертого порядка (бигармоническое уравнение) для прогиба и параболического уравнения для статического момента давления:

$$d\Delta^2 w + \alpha b \Delta P = f, \tag{7}$$

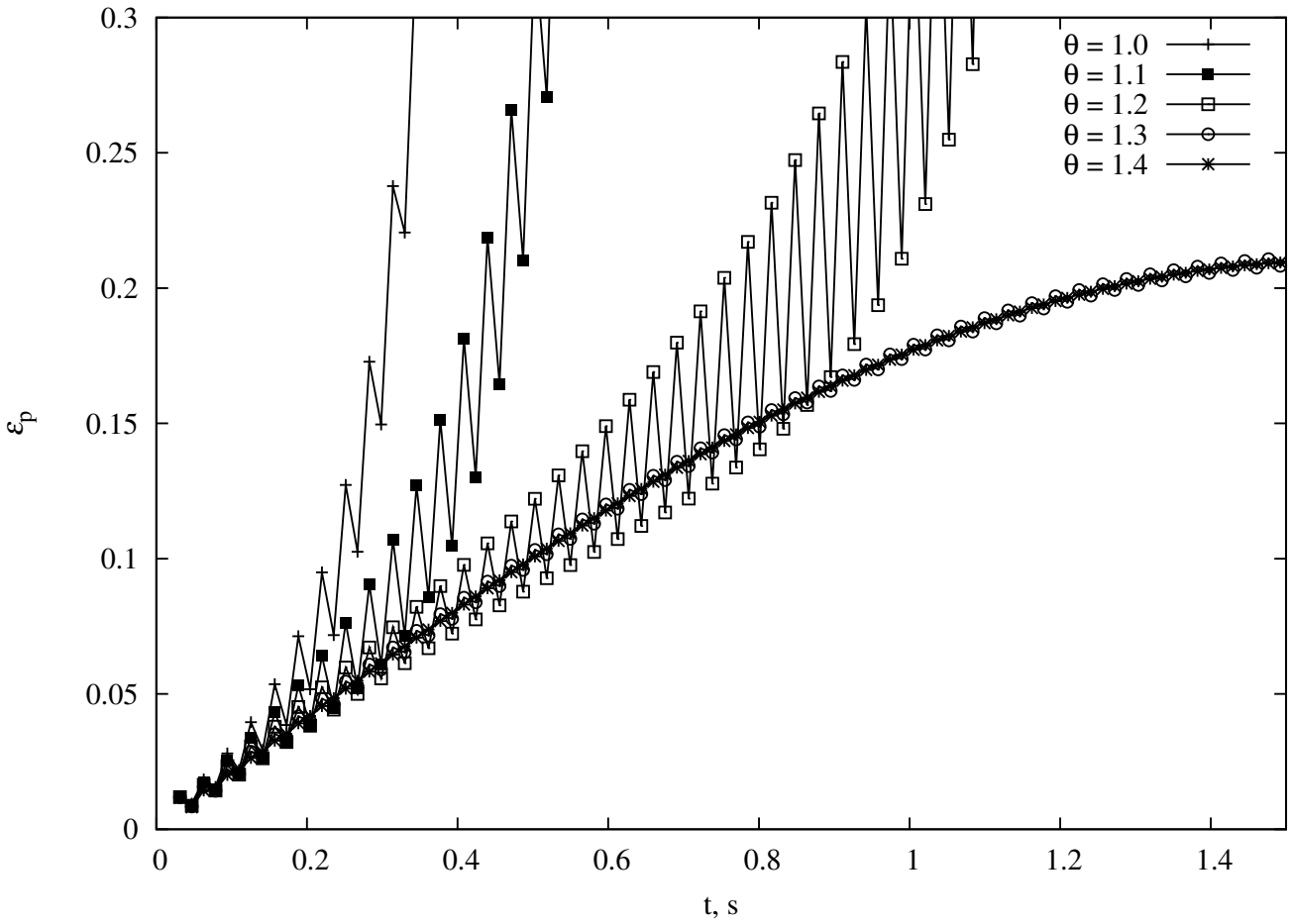

Рис. 2. Трехслойная схема с весом. Динамика погрешности давления при различных значениях веса: $\theta = 1.0$ (-+-), $\theta = 1.1$ (-■-), $\theta = 1.2$ (-□-), $\theta = 1.3$ (-○-), $\theta = 1.4$ (-✳-)

$$c\frac{\partial P}{\partial t} - 2\mu\alpha\frac{\partial \Delta w}{\partial t} - k_{eff}\Delta P + k_{eff}\frac{h^2}{12}P = \psi. \tag{8}$$

Здесь d, b, c - коэффициенты, характеризующие упругие свойства пористой среды и жидкости:

$$d = \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\frac{h^3}{12}, \quad b = \frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\frac{h^3}{12}, \quad c = \frac{2\mu+\lambda}{M} + \alpha^2,$$

и k_{eff} – эффективная проницаемость:

$$k_{eff} = \frac{k}{\eta}(2\mu+\lambda).$$

Также f – нормальная вертикальная сила, действующая на пластину, и ψ – интенсивность стока или источника.

Уравнения (7), (8) дополняется граничными и начальными условиями. Заме-

тим, что для прогиба задается однородное условие Дирихле:

$$w(\boldsymbol{x}, t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n}(\boldsymbol{x}, t) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega.$$

В работе мы рассматриваем проблемы численного решения задач пороупругости для пластин (краевых задач для уравнений (7), (8)). Используется конечно-элементная аппроксимация по продольным координатам. Отдельно обсуждаются проблемы численного решения краевых задач для бигармонического уравнения. Исследуется устойчивость двухслойных схем при аппроксимации по времени.

Основное внимание уделяется построению схем расщепления по физическим процессам для задач пороупругости для пластин. Успех достигается за счет перехода к трехслойной явно-неявной разностной схеме, когда часть членов системы уравнений берется с нижнего временного слоя. Устойчивость разработанной схемы обеспечивается за счет выбора величины веса. Теоретическое рассмотрение дополняется результатами численных экспериментов.

В **третьей главе** разработанные схемы расщепления по физическим процессам применяются для численного решения задач пороупругости при разработке месторождений нефти и газа. В рамках приближения однофазной фильтрации рассматриваются трехмерные задачи фильтрационной консолидации при добыче нефти на участке месторождения с протяженностью 1000.0 м по горизонтальным направлениям и 200.0 м по вертикальному направлению. В середине пласта пробурена добывающая скважина с радиусом $r = 0.1$ м. Для расчетов использовался следующий набор входных параметров: $\lambda = 0.646$ ГПа, $\mu = 0.284$ ГПа, $M = 1.598$ ГПа, $\alpha = 0.98$, $k = 10.0$ мД, $\eta = 0.001$ Па $\cdot$ с.

Для численного моделирования используем следующие начальные и граничные условия. Пластовое давление в начальный момент времени равно $p_0 = 40.0$ МПа. Для уравнения давления на всех границах пласта ставим условие непротекания $\left(\dfrac{\boldsymbol{k}}{\eta}\dfrac{\partial p}{\partial n} = 0\right)$. Добывающая скважина моделируется заданием забойного давления на стенках скважины: $p = p_p = 30$ МПа. В этом случае интенсивность стока и источника в (2) равна нулю ($f = 0$).

Вычислительный алгоритм базируется на конечно-элементной аппроксимации по пространству. Программное обеспечение для приближенного решения задач пороупругости разработано с использованием современных вычислительных технологий, свободных библиотек инженерных и научных вычислений, ориентированных на компьютеры параллельной архитектуры. Для построения геометрии

и генерации сетки используем программу `Gmsh`, дискретизации уравнений – компоненты программного комплекса `FEniCS`, для решения линейных уравнений – библиотеку для высокопроизводительных вычислений `PETSc`, для визуализации результатов – `ParaView`, для построения графиков – `gnuplot`.

Расчеты проводились на трех вычислительных тетраэдальных сетках с локальным сгущением вокруг скважины. Сетка 1 содержит 108575 ячеек, сетка 2 – 344867, сетка 3 – 1361790. Для решения линейной системы алгебраических уравнений используем обобщенный метод минимальный невязок (`GMRES`) с неполной `LU` факторизацией в качестве предобуславливателя. Расчеты проводились на вычислительном кластере Северо-Восточного федерального университета имени М.К. Аммосова *Ариан Кузьмин*.

В табл. 1 представлена зависимость общего времени расчетов в секундах от количества запущенных процессоров и сетки при использовании неявной схемы и схемы расщепления. Здесь в общее время входят затраты на инициализацию расчетов, загрузку и разделения расчетной сетки, подготовку и сборку матрицы и вектора линейной системы, а также расчет 10 временных шагов при шаге по времени $\tau = 1$ день.

Количество процессоров	**Общее время расчетов**, сек					
	Неявная схема			**Расщепленная схема**		
	Сетка 1	Сетка 2	Сетка 3	Сетка 1	Сетка 2	Сетка 3
1	58.21	219.98	1410.73	22.93	91.45	476.11
2	33.68	122.75	837.41	13.95	53.59	289.85
4	19.24	72.24	402.92	7.86	31.67	166.35
8	12.68	45.27	374.26	5.33	23.08	123.17
16	9.96	32.50	189.24	5.27	16.17	91.31
32	–	28.72	193.43	–	11.33	45.76
64	–	–	152.32	–	–	34.53

Таблица 1. Общее время расчетов

Из таблицы видно, что схема расщепления значительно сокращает время расчета (около 60%). Также, при согласовании размера используемой сетки и числа процессоров обеспечивается достаточно высокая степень эффективности параллелизации. При относительно малом количестве ячеек использование большого

количества процессоров может замедлить процесс расчета, так как время расходуется на обмен информацией между процессорами.

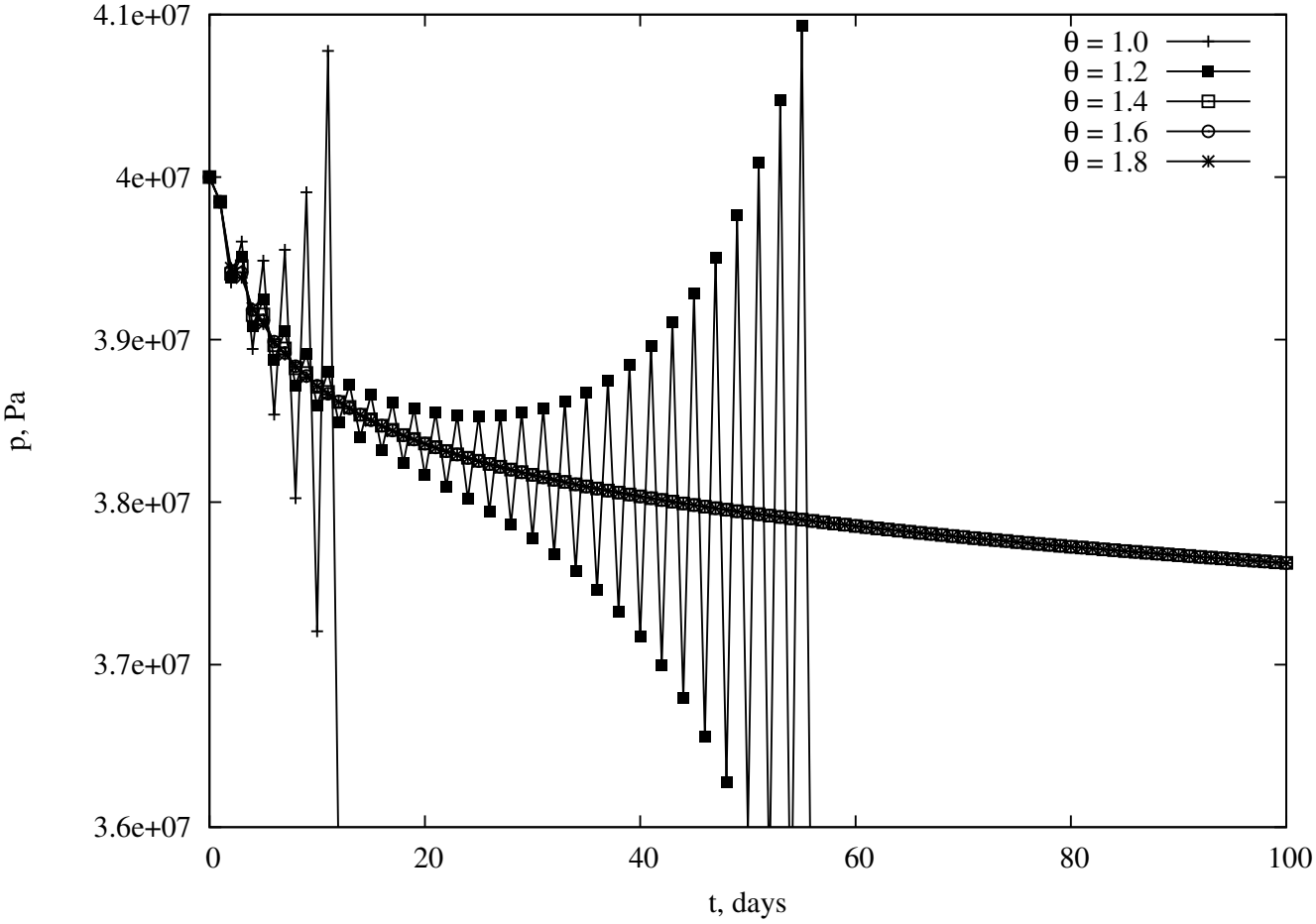

Рис. 3. Динамика давления при различных значениях веса: $\theta = 1.0$ (—+—), $\theta = 1.2$ (—■—), $\theta = 1.4$ (—□—), $\theta = 1.6$ (—○—), $\theta = 1.8$ (—✳—)

На рис. 3 представлены графики динамики давления при различных значениях веса θ схемы расщепления для шаге по времени $\tau = 1$ день. Видно, что стандартная схема расщепления с $\theta = 1.0$ неустойчива. При увеличении веса до 1.4 схема становится устойчивой, что соответствует теоретическим результатам.

На рис. 4 и 5 показаны распределения давления и вертикальной компоненты вектора смещения в различные момент времени (1 год, 2 года, 4 года, 6 года, соответственно). Данное решение получено с помощью схемы расщепления с весом $\theta = 1.8$ на самой подробной сетке 3 при $\tau = 1$ день. Расчеты проводились на 64 процессорах. Время расчета составило 88 мин. Смещение представлено на деформированной области и умножено на 100 для наглядности. За 6 лет разработки пластовое давление уменьшилось до 34.3 МПа и кровля пласта опустилась на 1

м в области скважины и на 0.93 м на границах пласта.

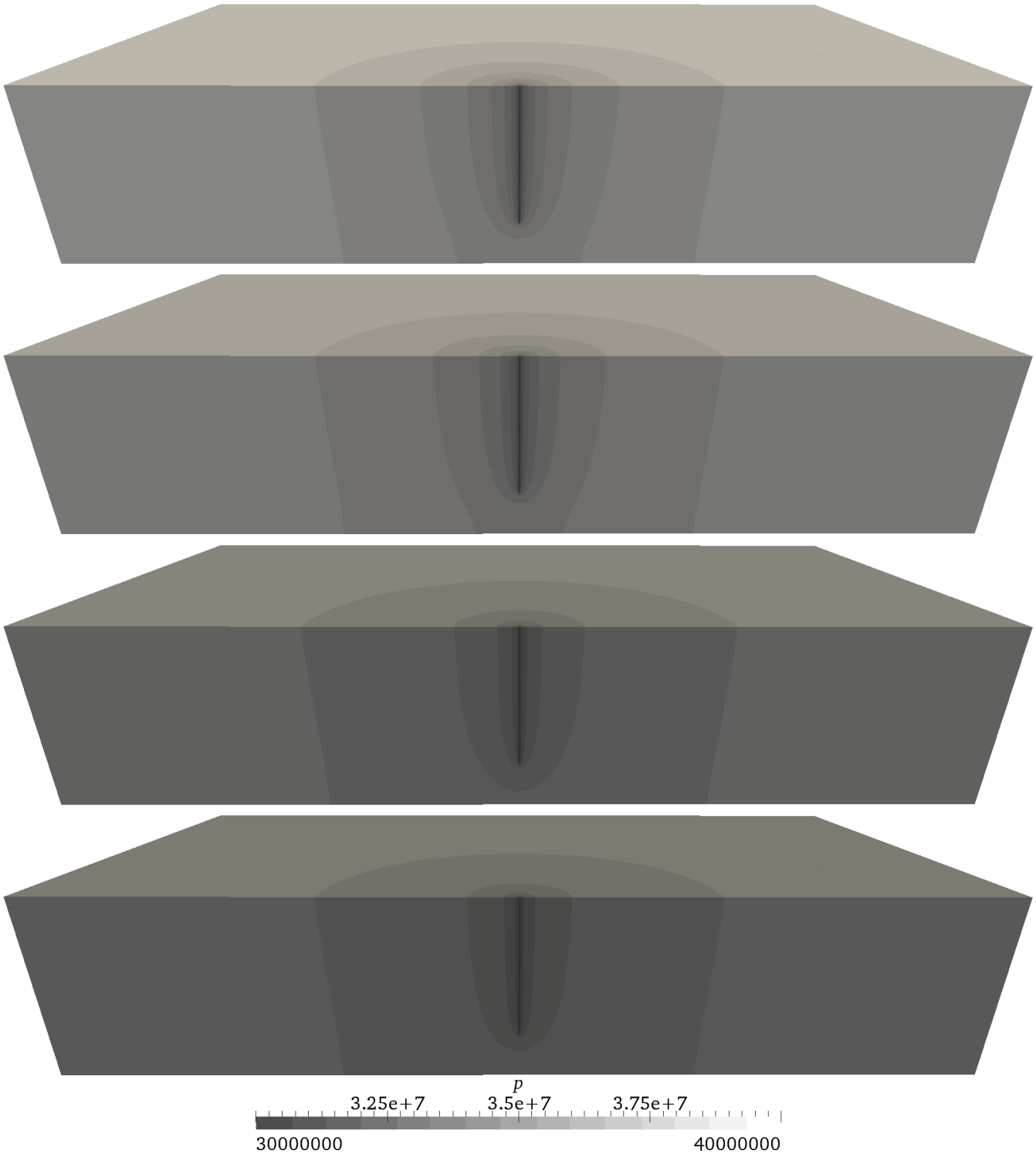

Рис. 4. Распределение давления. Сверху вниз: через 1 год, 2 года, 4 года, 6 лет

Основные результаты работы:

1. Построены безусловно устойчивые схемы расщепления по физическим процессам для приближенного решения задач пороупругости (фильтрационной

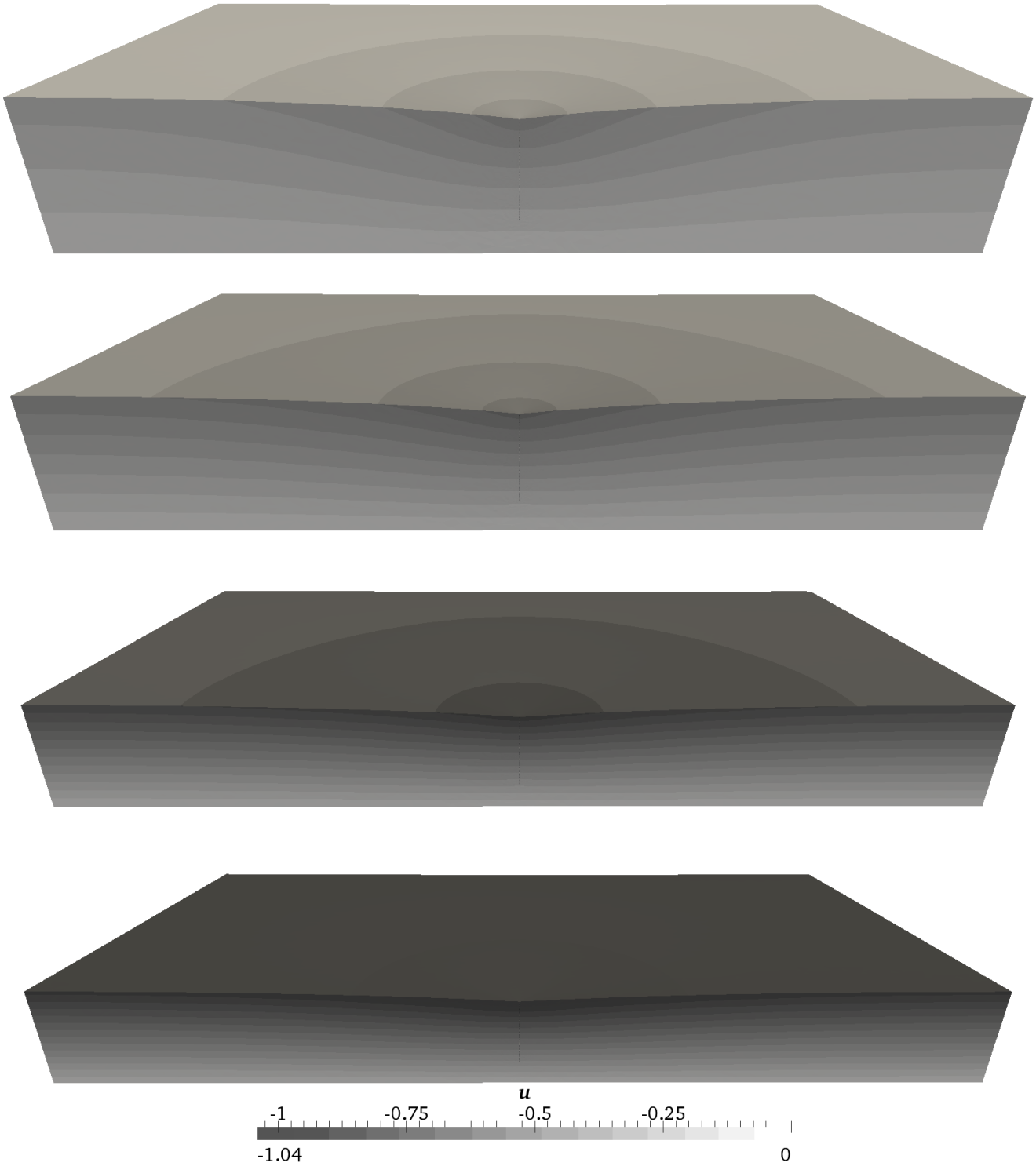

Рис. 5. Распределение вертикального компонента вектора смещения. Сверху вниз: через 1 год, 2 года, 4 года, 6 лет

консолидации). Переход на новый временной слой обеспечивается численным решением раздельных сеточных эллиптических задач: векторной задачи для перемещений и скалярной для давления в пористой среде. Безусловно

устойчивые аддитивные схемы строятся на основе выбора веса трехслойной схемы. Работоспособность предложенных схем расщепления продемонстрирована на ряде модельных задач;

2. Проведено численное моделирование проблем пороупругости для пластин, когда перемещения пористой среды описываются одной скалярной величиной (перемещение по нормали к серединной плоскости) и математическая модель базируется на эллиптическом уравнении четвертого порядка для перемещений и параболическом уравнении второго порядка для давления. Отмечаются особенности конечно-элементной аппроксимации краевой задачи, строятся чисто неявные двухслойные схемы и схемы расщепления по физическим процессам для системы уравнений пороупругости пластин;

3. Разработанные схемы расщепления по физическим процессам применяются для численного решения задач пороупругости при разработке месторождений нефти и газа. В рамках приближения однофазной фильтрации рассматриваются задачи фильтрационной консолидации в трехмерном приближении с добывающими и нагнетательными скважинами. Вычислительный алгоритм базируется на конечно-элементной аппроксимации по пространству. Программное обеспечение для приближенного решения задач пороупругости разработано с использованием современных вычислительных технологий, свободных библиотек инженерных и научных вычислений, ориентированных на компьютеры параллельной архитектуры.

Список литературы

1. **Kolesov A.E. Splitting schemes for poroelasticity and thermoelasticity problems / Kolesov A.E., Vabishchevich P. N., Vasilieva M.V. // Computers and Mathematics with Applications. 2014. V. 67, № 12. P. 2185-2198.**
2. **Колесов А. Е. Схема расщепления для задач пороупругости и термоупругости / Вабищевич П. Н., Васильева М. В., Колесов А. Е. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54, № 8. С. 1345-1355.**
3. Колесов А. Е. Математическое моделирование уплотнения горных пород при разработке месторождений нефти и газа / Колесов А. Е. // Тез. докл. Международной конференции: Суперкомпьютерные технологии математического моделирования. 2011. С. 81.
4. Колесов А. Е. Параллельная численная реализация задачи фильтрационной консолидации / Колесов А. Е. // Тез. докл. III Всероссийской научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых и специалистов «Математическое моделирование развития северных территорий Российской Федерации»: 2012. С. 14.
5. Колесов А. Е. Математическое моделирование фильтрации / Афанасьева Н.М., Васильева М.В., Колесов А. Е. // Якутск: Издательско-полиграфический комплекс СВФУ. 2011. 94 с.
6. Колесов А. Е. Вычислительные технологии. Профессиональный уровень / Антонов М.Ю., Афанасьева Н.М., Борисов В.С., Вабищевич П.Н., Васильева М.В., Григорьев А.В., Захаров П.Е., Сирдитов И.К., Попов П.А., Колесов А.Е. // Якутск: Издательский дом СВФУ, 2014. 308 с.